センター数学ⅡＢを受講する皆さんへ

このテキストを手にしている皆さんは，志高くここまで勉強を進めてきたと思います。その努力を，**センター数学ⅡＢに通用する力に仕上げるために必要なこと**とは？　それをお話する前に，まず皆さんには**「公式とそれを使う技術」**がきちんと身についていますか？ 特に高２までに数学の各分野のさまざまな問題を通じ，皆さんは着実に技術を磨いてきたはずです。もし不足している部分・分野が自覚された時には，スタディサプリ**「高１・高２ スタンダード数学」「高１・高２ ハイレベル数学」**などを利用して，速やかに技術を再び磨いておいてください。

「プロセス」が重視されるべきである数学では，その本当の力をマーク式で判断することは難しいわけですが，そもそもセンター試験の数学は，マーク式でありながらも，問題を解いている間は**記述式の試験と変わりません**。答えにたどり着くまでに頭を働かせ，手を動かし，そして出した答え「だけ」をマークする。その答えだけで判断される。恐ろしいですね…。さらに，問題の意図を理解し，たとえ別の解き方があろうとも**誘導に沿うように**解き，最後まで正確に計算し，それをマークする。それをたった60分ですべて行うために，**思考・計算両方のスピードと正確性**が必要です。

また，誘導といっても，親切なものばかりではなく，かなり強引な，一般的ではない，問題を成立させるためだけの誘導も存在します。ですから，うまく誘導に乗りながらも，どこかちょっと離れたところから問題を眺める視点や余裕をもっていなければいけないのです。つまりこの誘導によって自分が今「やらされている・やらされようとしている」ことの「意味」いわば「真意」をつかむためには，**国公立２次試験に匹敵するような数学の力や，時にはそれ以上の力が必要**であることはいうまでもありません。

このテキストは，まずはそのために必要な**基礎力を自分で確認**し，さらになかなか自然に養われることのない**「問題のとらえ方」を養成**するための問題が厳選されています。過去問題を中心に作成されていますが，過去問を自分で闇雲にやっても決して得られることのない**「充実感」**と真の実力を自分でつけていくために必要な**「問題に対する考え方」**が満載です。

そして率直に言います。**「この講座だけをやればいい」のではありません**。この講座で身につけたスキルを使って，**真の実力を身につけるための演習を積む**必要があります。そのために**必要な問題集もご紹介**いたします。何も知らない状態で問題集をやるのは，何の準備もしないで闘いに出るようなもの。しかし，この講座を受けた後は，自信を持って進むことができるでしょう。

講が進むたびに，さまざまな「開かずの扉」が音を立てて開くでしょう。必要なのは，磨いてきたはずの**技術**，そしてその技術を活かすべくこの講座をとらえる**謙虚な姿勢**，そして受かりたいという**気持ち**です。もし感動することがあっても，感動したという事実だけでその日を終わらないでください。せっかく開きかけた扉も，時間をたてば自動的に閉まりますよ。**真に感動すべきは，自分で「未知なる道」を切り拓いた時**です。一歩一歩，自分の目指すべき大学を目指して前進しましょう。何かを見失ったとき，忘れた時，私は，指南役としていつもあなたのそばに現れます。

山内　恵介

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜センター数学ⅡＢ　目次＞

第１講　三角関数①
第２講　指数・対数関数①
第３講　三角・指数・対数関数②
第４講　微分法・積分法①
第５講　微分法・積分法②
第６講　微分法・積分法③
第７講　数列①
第８講　数列②
第９講　ベクトル①
第 10 講　ベクトル②
補講　図形と方程式

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

まずは「CHECK&UP」の問題をノート等に解きましょう。センター試験とはいえ，数学はすべて実際に手を動かして計算しなければいけません。マーク式の答えの形や誘導に頼らずに自力で解けてほしい問題を厳選してあります。解き終えたら「解答」を見て，答えのみならず「解き方」について確認をしておきましょう（第６講と補講には「CHECK&UP」はありません）。

つぎに「講義問題」です。1～3の３問構成です。「CHECK&UP」で確認した知識を元に，まずは何も見ないで問題をノート等に解いてみましょう。特に時間を計る必要はありません。センター試験は時間との戦いですが，その短縮のためには「まずは解けること」が最低条件です。

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です。それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。問題が掲載されているページは全て見開きの構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています。ここには何でも「自由」に書いて残すことができます。「自由」とはどういうことか。 それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです。授業時間は限られていますから，先生は全てを黒板に書くことはしていません。よって，授業を聞き，先生が話したことや自分

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです。きれいにまとめても誰も見てくれません。あくまで「Note」＝「記録」です。後から見て自分だけがわかる程度でいいのです。

ちなみにここまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ。この講座はいつでも止めたり戻ったりできます。もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありません。ちなみに止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です。あなた方に残された時間は限られています。勉強は数学だけじゃないでしょう？　大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事です。もちろんそれでも「今日はこれを解決しないと眠れない！」という人…。明日は寝不足で学校に行くことになるかもしれませんが，先生がとことんお付き合いしますよ。そんな日も時にはあっていいのかもしれませんね。

③　復習について　その１

授業で扱ったポイントを頭に描きながら，まずは問題をもう一度解いてみましょう。予習でできた部分はスピードアップを，できなかったところは確かめるようにゆっくりと。一回目の復習は緩急をつけることが大切です。止まってしまった場合は Note 欄を参照してください。それでも忘れてしまった場合はもう一度講義を見直しましょう。そのようにして最後まで解ききったとき，その問題があなたにどんなスキルや考え方を要求したのかを，全体を見回して確認しておきましょう。

そして二回目以降は自分でできる「最高速」で問題を解いてみましょう。必ず一通り通すこと。チャンスは「空き時間」「隙間時間」です。センター数学は１問にかかる時間は多くて 20 分前後です。一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります。それを実感することも成長の糧となるでしょう。

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう。「練習問題」が各講３題ずつ用意してあります。講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります。また問題によって難易度も様々です。解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。

以上を確実に繰り返すことにより，必ずやセンター試験の数学ⅡB を攻略するための「確固たる土台」ができあがります。そこからは過去問や後述する問題集で経験を積んでいくだけです。みなさんの日々の努力，期待しています。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

☆センター数学ⅡB 「おすすめの問題集」☆

この講義が終了したら，または同時並行で進めると効果的な書籍を以下に挙げておきます。学校の授業で課せられた課題等とのバランスを見ながら，着々と進めて行きましょう。

ちなみに数学の日々の自主学習において，詳細な解答がないものは全くお勧めできません。答えに行き着く「プロセス」が数学であることは前述した通りです。最後の「答」しかない問題集やプリントではお話になりません。自分で考えれば必ず答えにたどり着く！とおっしゃられる方もおりますが，「各知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」が全く考慮されておらず，「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えるでしょう。受験勉強，特に受験が近づいてきている時期に求められるのは，「時間対効果」です。

さて，そもそも選択式ではないセンター数学においては，まずは記述ができる，すなわち典型的な「解法の流れ」がわかっている状態が望ましいのです。よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」とすべく。

そして，いざ練習段階となればより良問が厳選されているセンター試験向けの問題集が望ましいことは言うまでもありません。学校で購入したものや配布されたものに加え，さらなる訓練を積むための良本が存在します。上記したように「流れ」が大切なセンター試験ですから，単問が並ぶだけの「マーク式問題集」は必ずしもセンター試験対策とはなりません。注意してください。

以下に挙げるのは上記の考えに基づいた本です。良問を通じた日々のたゆまぬ訓練，それはセンター試験のみならず私大・２次試験の記述にもつながっていくのです。

【センター試験のための基礎固め】

・「大学入試 短期集中ゼミ センター編 センター数学ⅡB」（実教出版）

定評のある「10 日あればいい」シリーズのセンター編。基礎力定着のための本。
教科書にかかれていない解法のテクニックをうたっていますが，突飛なものではなく
数学の本質に基づく堅実な基礎力がつくでしょう。

【実戦問題集】

・マーク式総合問題集　数学Ⅱ・B （河合塾シリーズ）

通称「黒本」。過年度の「全統マーク模試（河合塾主催）」の問題を厳選収録。

・大学入試センター試験実戦問題集　数学Ⅱ・B （代々木ライブラリー）

通称「白本」。過年度の「全国センター模試（代ゼミ主催）」の問題を厳選収録。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

・大学入試センター試験実戦問題集　数学Ⅱ・Ｂ　（駿台文庫）

通称「青本」。過年度の「駿台全国，駿台・ベネッセマーク模試」の問題を厳選収録。

・センター試験実戦模試　Ⅱ・Ｂ　（Ｚ会出版編集部）

通称「緑本」。Ｚ会オリジナル模試＋予想模試を掲載。

・センター試験過去問研究　数学Ⅰ・Ａ／Ⅱ・Ｂ　（教学社）

通称「赤本」。有名な過去問題集のセンター試験版。

センター試験　本試を収録（直近の年度については追試も収録）。

まずはセンターに向けた標準的な力がついているか試したい時は「白本」，センターレベル前後の力を養成したいのであれば「黒本」，センターを（遙かに）越えたレベルの問題で実力をつけたいのであれば「青本」「緑本」がお勧めです。

ちなみにこの色本ですが，大問①～④をすべて通して解く必要はありません。他の科目の勉強と同じように，強化したい「同じ分野の問題」を立て続けにやると必要な知識がどんどん積み重なって効果的でしょう（例えば「微分法・積分法」の問題ばかりを７回分やる，など）。

☆センターの過去問を使った対策について☆

「赤本」などの「センターの過去問」には，講座の復習や色本による十分な練習が終了した後に手をつけることとなるでしょう。さて，2015 年からの課程（現行課程）の出題範囲は，数学ⅡＢに関しては前課程と大きく変わるところはありません。

【現行課程（2015 年～）】
【前課程（2006 年～2014 年）】

① ［1］三角関数または図形と方程式（15 点）
　［2］指数・対数関数（15 点）
② 微分法・積分法（30 点）
③ ベクトル（20 点）
④ 数列（20 点）

【前々課程（1997 年～2005 年）】

① ［1］三角関数（15 点）
　［2］指数・対数関数（15 点）
② 微分法・積分法（30 点）
③ ベクトル（20 点）
④ 複素数平面（20 点）
※数列は「ⅠＡ」③

前課程（2006 年～2014 年）の過去問については，現行課程と変わらず演習に使うことができますが，前々課程（1997 年～2005 年）については，問題を解く際のポイントとして以下をおさえていただきたいと思います。

・三角関数　→　基本的な三角方程式・不等式や相互関係・加法定理・倍角の公式・合成などを確認するために使用できる。比較的現行課程に近いが，やや基礎的かつ誘導が少ない。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

・指数・対数関数　→　大きくは変わらないが，現行課程に比べて誘導が少ない年もあり，その場合は記述試験としての力が試される。

・微分法・積分法　→　知識の練習にはよいが，現行課程で見られる「流れ」を感じさせる問題がほとんど見られない。

・ベクトル　→　大きく異なる点はないが，やや「典型的」な問題が現行課程に比べて多い。また現行課程に比べて誘導が少ない年もあり，力が試される。

・数列　→「典型的」な問題が多い。また誘導形式とは言いがたい（ただ答えだけをマークさせる）問題が散見される。

前々課程の数学の問題は，現行課程とは似て非なる問題です。また年度が古くなればなるほど「単発」，つまりプロセスを自分で構築して答えのみをマークしていく問題が増えると考えていただいて結構です。現行課程の問題は，「誘導を理解」し，ときに「マークから推測しながら」問題を解き進めることが必要であり，また計算においてもやり直す時間が限られるなど厳しい「時間的制約」に悩まされることでしょう。それを打破するための「各分野ごとの下地作り」としては前々課程の問題は使えますが，全体を通じて60分で解いてみる，という使い方はできません。

また，大問１において「図形と方程式」が出題される場合は，基本的な公式を利用すれば解ける問題が多く見られます。点・直線・円の典型的な問題について，その解法を今一度おさえておきましょう。

最後に，60分の「時間配分」は，各分野の問題を「解ききる力」がある程度以上ついた人が考えることです。同じ問題を繰り返し解くことで速度が上がり，また「流れ」が身につきます。逆に，一度しか解かなくてよい問題があるとすれば，それは「全く意義が感じられない」かつ「スピードアップが限界を迎えた」「流れが完全に把握できている」問題に限るといってもよいでしょう。そう感じることができる日まで，特に時間的に厳しいと感じる問題を中心に何度も色本や過去問，模試を解き直し，センターの問題の「流れ」を体に覚え込ませましょう。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　三角関数①

【CHECK & UP】

1　原点O中心とする半径2の円周上にある点をPとする．線分OPが x 軸の正の方向となす角を θ とするとき，点Pの座標を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ．

2　[1]　$0 \leqq \alpha < 2\pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ のとき，次の方程式・不等式を満たす α，β を求めよ．

(1)　$\sin\alpha = \cos\alpha$　　(2)　$\sin\alpha > \cos\alpha$　　(3)　$\sin 2\beta < \cos 2\beta$

[2]　次の□に＋，−，π，$\dfrac{\pi}{2}$ のうち当てはまるものを入れよ．

(1)　$\sin\theta = \square\sin(\square - \theta)$　　(2)　$\cos\theta = \square\cos(\square - \theta)$

(3)　$\sin\theta = \square\cos(\square - \theta)$　　(4)　$\cos\theta = \square\sin(\square - \theta)$

[3]　次の各場合において α を β を用いて表せ．

(1)　$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\sin\alpha = \sin\beta$

(2)　$\pi \leqq \alpha \leqq 2\pi$，$\pi \leqq \beta \leqq 2\pi$，$\sin\alpha = \sin\beta$

(3)　$0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$，$0 \leqq \beta \leqq 2\pi$，$\cos\alpha = \cos\beta$

(4)　$-\pi \leqq \alpha \leqq \pi$，$-\pi \leqq \beta \leqq \pi$，$\cos\alpha = \cos\beta$

3　[1]　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け．

(1)　$2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$　　(2)　$\cos 2\theta \leqq \sin\theta$

[2]　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき　$f(\theta) = \sin\left(\theta - \dfrac{2}{3}\pi\right) + \sin\theta$ の最大値，最小値を求めよ．

[3]　$y = 2\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta - 2\cos\theta - 3$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$x = \sin\theta + \cos\theta$ とおくとき，y を x の式で表せ．また x の取り得る値の範囲を求めよ．

(2)　y の最大値と最小値を求めよ．

[4]　$y = \cos^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$　$\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$　について，次の問いに答えよ．

(1)　y を $\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表せ．

(2)　y の最大値，最小値を求めよ．またそれぞれの値をとる θ を求めよ．

4　[1]　2直線 $y = -3\sqrt{3}x + 1$ と $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ のなす角 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

[2]　$\tan\theta = t$ とおくとき，次の式を t を用いて表せ．ただし $t \neq \pm 1$ とする．

(1)　$\tan 2\theta$　　(2)　$\cos^2\theta$ および $\cos 2\theta$　　(3)　$\sin 2\theta$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 [1] a を正の定数とし，角 θ の関数 $f(\theta)=\sin(a\theta)+\sqrt{3}\cos(a\theta)$ を考える．

(1) $f(\theta)=$ ア $\sin\left(a\theta+\dfrac{\pi}{イ}\right)$ である．

(2) $f(\theta)=0$ を満たす正の角 θ のうち最小のものは $\dfrac{ウ}{3a}\pi$ であり，

小さい方から数えて4番目と5番目のものは，それぞれ $\dfrac{エオ}{3a}\pi$，

$\dfrac{カキ}{3a}\pi$ である．

[2] A，B は $0<A<B$ を満たす定数とする．$0\leqq\theta<\pi$ の範囲で関数

$$f(\theta)=A\sin^2\theta+(A+B)\sin\theta\cos\theta+B\cos^2\theta \quad \cdots\cdots①$$

の最大値が $10+2\sqrt{29}$，最小値が $10-2\sqrt{29}$ であるとする．

(1) $A=b-a$，$B=b+a$ とおいて①の右辺を変形すると

$$f(\theta)= ア (\cos^2\theta-\sin^2\theta)+ イウ \sin\theta\cos\theta+ エ$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(オ \theta+\alpha)+ エ$$

となる．ただし，α は $\tan\alpha=\dfrac{カ}{キ}$ を満たす角で $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(2) $f(\theta)$ が最大となるのは $\theta=\dfrac{\pi-2\alpha}{ク}$ のときで，

最小となるのは $\theta=\dfrac{ケ\pi-2\alpha}{コ}$ のときである．

また，$f(\theta)$ の最大値，最小値の条件を用いると

$A=$ サ，$B=$ シス

であることがわかる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$0 \leqq \alpha \leqq \pi$ として

$$\sin\alpha = \cos 2\beta$$

を満たす β について考えよう．ただし，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ とする．

たとえば，$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，β のとり得る値は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ と $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ の二つである．

このように，α の各値に対して，β のとり得る値は二つある．そのうちの小さい方を β_1，大きい方を β_2 とし

$$y = \sin\left(\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}\right)$$

が最大となる α の値とそのときの y の値を求めよう．

β_1，β_2 を α を用いて表すと，$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のときは

$$\beta_1 = \frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}} - \frac{\alpha}{\boxed{\text{オ}}},\quad \beta_2 = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi + \frac{\alpha}{\boxed{\text{オ}}}$$

となり，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \pi$ のときは

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}} + \frac{\alpha}{\boxed{\text{ク}}},\quad \beta_2 = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi - \frac{\alpha}{\boxed{\text{ク}}}$$

となる．

したがって，$\alpha + \dfrac{\beta_1}{2} + \dfrac{\beta_2}{3}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi \leqq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leqq \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi$$

である．よって，y が最大となる α の値は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}\pi$ であり，そのときの y の値は

$\boxed{\text{ツ}}$ であることがわかる．$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ $\dfrac{1}{2}$　　① 1　　② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 座標平面上の原点 O を中心とし，半径 2 の円を S とする．円 S 上の 2 点 A，B を

$$\mathrm{A}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta),\ \mathrm{B}\left(2\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right),\ 2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

とする．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

円 S 上の点 A，B における接線をそれぞれ l，m とし，l と m の交点を C とする．

(1) 線分 OC の長さは **ア** であり，点 C の座標は

$$\left(\boxed{イ}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{\boxed{ウ}}\right),\ \boxed{イ}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{\boxed{ウ}}\right)\right)$$

である．

(2) 線分 AC の中点を P とし，直線 l と x 軸の交点を Q とする．点 P の座標は

$$\left(\boxed{エ}\cos\theta-\sqrt{\boxed{オ}}\sin\theta,\ \boxed{エ}\sin\theta+\sqrt{\boxed{オ}}\cos\theta\right)$$

と表される．

三角形 OAC の面積が三角形 OQA の面積の 2 倍になるとき，点 P の座標は

$$\left(\frac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}},\ \frac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}}{\boxed{キ}}\right)$$

である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第1講　三角関数①

1 [1] a を $0<a<\pi$ を満たす角度とする．$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で関数

$$f(\theta)=\sin(\theta-a)-\sin\theta$$

を考える．

(1) 方程式 $f(\theta)=0$ の解 θ は a を用いて

$$\theta=\frac{\pi}{\boxed{ア}}+\frac{a}{2}$$

と表される．さらに，この解 θ が $\sin(\theta-a)=\frac{1}{2}$ を満たすならば

$$a=\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\pi$$

である．

(2) a を(1)で求めた角度とするとき，関数 $f(\theta)$ は最大値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$ をとる．

また，$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{カ}}$ のとき最小値 $-\sqrt{\boxed{キ}}$ をとる．

[2] 二つの関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$g(x)=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$$

で定める．

$f(x)$ と $g(x)$ の和は $f(x)+g(x)=\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}\sin\left(\boxed{ウ}x-\dfrac{\pi}{\boxed{エ}}\right)$

である．したがって，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，$f(x)+g(x)$ は

$x=\dfrac{\pi}{\boxed{オ}}$ のとき最大値 $\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ をとる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で　$\sin 4\theta=\cos\theta$　……(1)　を満たす θ と $\sin\theta$ の値を求めよう．

一般に，すべての x について

$\cos x=\sin(\boxed{\text{ア}}-x)$

である．$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪　π　　①　$\dfrac{\pi}{2}$　　②　$-\dfrac{\pi}{2}$

したがって，(1)が成り立つとき，$\sin 4\theta=\sin(\boxed{\text{ア}}-\theta)$ となり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で

4θ，$\boxed{\text{ア}}-\theta$ のとり得る値の範囲を考えれば，$4\theta=\boxed{\text{ア}}-\theta$ または

$4\theta=\pi-(\boxed{\text{ア}}-\theta)$ となる．よって，(1)を満たす θ は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}$ または

$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である．

$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウエ}}}$ の値を求めよう．(1)より

$\boxed{\text{キ}}\sin 2\theta\cos 2\theta=\cos\theta$

となり，この式の左辺を2倍角の公式を用いて変形すれば

$(\boxed{\text{ク}}\sin\theta-\boxed{\text{ケ}}\sin^3\theta)\cos\theta=\cos\theta$

となる．ここで $\cos\theta>0$ であるから

$\boxed{\text{ケ}}\sin^3\theta-\boxed{\text{ク}}\sin\theta+1=0$　……(2)

が成り立つ．$\sin\theta=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ は(2)を満たしている．$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウエ}}}$ とすると，

$\sin\theta\neq\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であるから $\boxed{\text{コ}}\sin^2\theta+\boxed{\text{サ}}\sin\theta-1=0$ となる．

ここで，$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウエ}}}>0$ より　$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウエ}}}=\dfrac{\boxed{\text{シス}}+\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 a を正の定数とする．点Oを原点とする座標平面において，中心がOで，半径が1の円と半径が2の円をそれぞれ C_1，C_2 とする．$\theta \geqq 0$ を満たす実数 θ に対して，角 $a\theta$ の動径と C_1 との交点をPとし，角 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}$ の動径と C_2 との交点をQとする．ここで，動径はOを中心とし，その始線は x 軸の正の部分とする．

(1) $\theta=\pi$ のとき，Qの座標は $(\sqrt{\boxed{ア}}, \boxed{イ})$ である．

(2) 3点O，P，Qがこの順に一直線上にあるような最小の θ の値は

$$\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}a+\boxed{オ}}\pi$$

である．θ が

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}a+\boxed{オ}}\pi$$

の範囲を動くとき，円 C_2 において点Qの軌跡を弧とする扇(おうぎ)形の面積は

$$\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}a+\boxed{ク}}\pi$$

である．

(3) 線分PQの長さの2乗 PQ^2 は

$$\boxed{ケ}-\boxed{コ}\sin\left(\frac{\boxed{サ}a+\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\theta\right)$$

である．

(4) x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\boxed{ケ}-\boxed{コ}\sin\left(\frac{\boxed{サ}a+\boxed{シ}}{\boxed{ス}}x\right)$$

とおき，$f(x)$ の正の周期のうち最小のものが 4π であるとすると，$a=\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

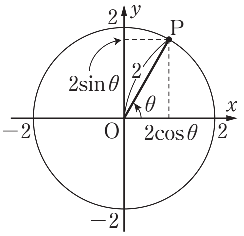
テキスト解答

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　三角関数①

【CHECK & UP】

1



左図より

$\mathrm{P}(\boldsymbol{2\cos\theta},\ \boldsymbol{2\sin\theta})$

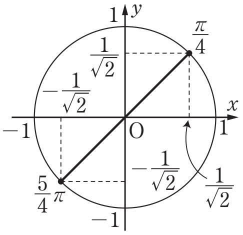
> 三角比・三角関数の定義から明らかであるが．一般に原点中心，半径 r の円周上の点は $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ と表すことができる．このときの θ は x 軸の正の方向となす角．
> 逆にこの形を見たら，原点中心，半径 r の円上にある点と認識できるように．

2　[1]　(1)　$\alpha=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}},\ \boldsymbol{\dfrac{5}{4}\pi}$　　(2)　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{5}{4}\pi}$

(3)　$0\leqq\beta\leqq\pi$　より　$0\leqq2\beta\leqq2\pi$

よって　$0\leqq2\beta<\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi<2\beta\leqq2\pi$

ゆえに　$\boldsymbol{0\leqq\beta<\dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{5}{8}\pi<\beta\leqq\pi}$



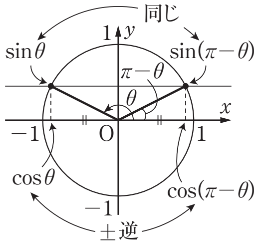
> $0\leqq\theta<2\pi$ において $\sin\theta$ の値と $\cos\theta$ の値が等しいのは $\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$ のときである．これを意識すれば，角度が同じ１次三角方程式・不等式において合成や倍角の公式を用いずとも解くことができる．

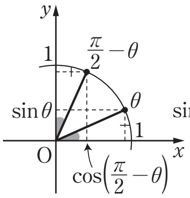
[2]　(1)　$\sin\theta=\boxed{+}\sin(\boxed{\boldsymbol{\pi}}-\theta)$

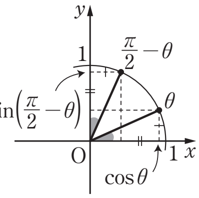
(2)　$\cos\theta=\boxed{-}\cos(\boxed{\boldsymbol{\pi}}-\theta))$

(3)　$\sin\theta=\boxed{+}\cos\left(\boxed{\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}}-\theta\right)$

(4)　$\cos\theta=\boxed{+}\sin\left(\boxed{\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}}-\theta\right)$

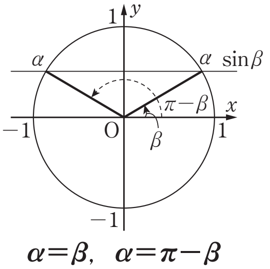






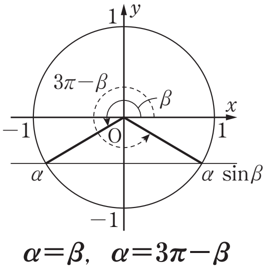
> 角度を変えずに sin と cos を相互に書き換えるには $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用するが，１次式には使えない．
> １次三角方程式・不等式の場合は「合成」が使えるが，後述の「1：1型」であれば角度を変えてでも sin 同士，cos 同士を比べることができれば，直接角度の関係を導くことができる．また，そういう誘導が入試問題についた場合にそれに乗ることができる．

[3]　(1)



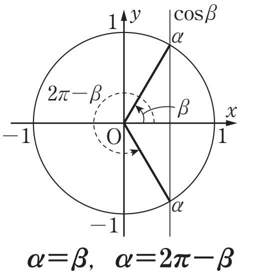
$\boldsymbol{\alpha=\beta,\ \alpha=\pi-\beta}$

(2)



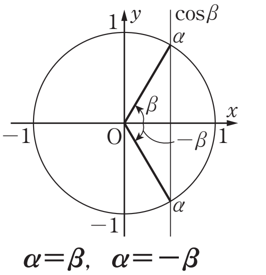
$\boldsymbol{\alpha=\beta,\ \alpha=3\pi-\beta}$

(3)



$\boldsymbol{\alpha=\beta,\ \alpha=2\pi-\beta}$

(4)



$\boldsymbol{\alpha=\beta,\ \alpha=-\beta}$

> sin の値が同じ＝「高さ」が同じというイメージ．(2)で $3\pi-\beta$ というのはしっくりこない人がいるかもしれない．例えば sin の値が $-\dfrac{1}{2}$ になる角度は(2)の範囲で $\dfrac{7}{6}\pi$ と $\dfrac{11}{6}\pi$ で合計 3π である．他の sin の値の時も同様である．確証がないときは具体的な値で検証することも大切である．限られた時間ではあるが．
> cos の値が同じときも考え方は同じ．(4)ではマイナスの角度を許しているので興味深い解答が得られている．
> (1)〜(4)で挙げた以外に，$\alpha,\ \beta$ のとりうる範囲が異なる場合なども考えられる．ここで挙げた問題をベースとして考えてほしい．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ (1) $2\sin^2\theta+3\cos\theta-3=0$　より　$2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta-3=0$

$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$　　$(2\cos\theta-1)(\cos\theta-1)=0$

$\cos\theta=\frac{1}{2},\ 1$　　$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\boldsymbol{\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi}$

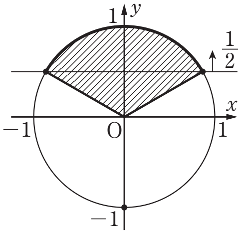
(2) $\cos 2\theta\leqq\sin\theta$ より　$1-2\sin^2\theta\leqq\sin\theta$

$2\sin^2\theta+\sin\theta-1\geqq0$　　$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)\geqq0$

$\sin\theta\leqq-1,\ \frac{1}{2}\leqq\sin\theta$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \theta=\frac{3}{2}\pi}$



三角方程式・不等式の中には「置き換え（的発想）」により整式（２次や３次など）の方程式・不等式として途中まで扱う問題が散見される．そうして１次三角方程式，不等式に持ち込むことにより，対応する角度やその範囲を導くことができる．
三角関数の値とその角度を結びつける上では「単位円」が有効．その上で，角度の範囲が広がるにつれ，その周期性を活かすために「三角関数のグラフ」を用いるとよい．

［2］ $f(\theta)=\sin\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)+\sin\theta=\sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi-\cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi+\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$=\sin\theta\cdot\frac{1}{2}-\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

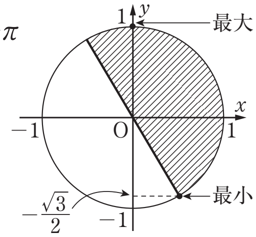
$0\leqq\theta\leqq\pi$ より　$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{2}{3}\pi$

よって　最大値は　**1**

最小値は　$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

※最大値をとるのは　$\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$

つまり　$\theta=\frac{5}{6}\pi$ のとき　　最小値をとるのは　$\theta=0$ のとき



関数の最大・最小がモチーフとなっていることから，あえて和→積の公式を利用するメリットはない．センター試験の範囲外であり，公式を用いた方が有利になる問題が出題されることも少ないと思われる．
合成は「加法定理の逆」であることを理解していれば，左のような変形は不要．理解していなければセンター試験特有の「誘導」に乗れないこともある．最終形が cos となる合成も視野に入れておこう．もちろん，用いるのは「cos の加法定理の逆」である．
合成後は与えられた角度の範囲が「ずれる」ので注意．値をとる角度を要求された時にも，ずれた角度を用いることに注意しよう．

［3］ (1) $x=\sin\theta+\cos\theta$ より

$x^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$　　$\sin\theta\cos\theta=\frac{x^2-1}{2}$

よって　$y=x^2-1-2x-3$　　ゆえに　$\boldsymbol{y=x^2-2x-4}$

また，$x=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ より　$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$　　ゆえに　$\boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}}$

いわゆる「典型問題」．最後が「２次関数」になるのが特徴．

(2) $y=(x-1)^2-5$ より　$x=-\sqrt{2}$ で最大値　$\boldsymbol{-2+2\sqrt{2}}$

$x=1$ で最小値　**−5**　をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[4]　(1)　$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$　より

$$y=\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}}$$

(2)　$y=\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$

$0\leqq 2\theta\leqq\pi$　より　$\dfrac{\pi}{6}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$

よって　$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$\theta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$ のとき　最大値　$1+\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7}{6}\pi$　つまり　$\theta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$ のとき　最小値　$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\mathbf{0}$　をとる.

> これも「典型問題」. 最後は三角関数の最大・最小.「倍角の公式」を変形して作成する，いわゆる「半角の公式」は，試験までには暗記していなければ時間的に厳しい.
> $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$
> $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$
> $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

4　[1]　2 直線 $y=-3\sqrt{3}x+1$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ が x 軸の正の方向となす角を

それぞれ α，β とすると，$\tan\alpha=-3\sqrt{3}$，$\tan\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+(-3\sqrt{3})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{-6\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2-9}=\sqrt{3}$$

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\sqrt{3}$　より　$\theta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$

> tan の加法定理. 計算した結果，値がマイナスになれば鈍角，プラスなら鋭角となる. ほとんどの場合は鋭角を要求されるため，マイナスで出た場合はプラスにしたもので考えればよい. 例えば $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\tan\dfrac{5}{6}\pi$，いわゆる 150° だが，これを 30° で出るようにしたければ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ として考えればよい. この「マイナスをプラスに変える」のが「絶対値」である. もちろんセンター試験ではマイナスをなくすだけであるが.

[2]　(1)　$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\boldsymbol{\dfrac{2t}{1-t^2}}$

(2)　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+t^2$　より　$\cos^2\theta=\boldsymbol{\dfrac{1}{1+t^2}}$

よって　$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\dfrac{1}{1+t^2}-1=\boldsymbol{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$

(3)　$\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta$ より　$\sin 2\theta=\tan 2\theta\cdot\cos 2\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\boldsymbol{\dfrac{2t}{1+t^2}}$

> tan の倍角をモチーフに，三角関数の相互関係，cos の倍角の公式を確認したであろう. (2)は $\cos^2\theta$ の誘導をつけた. これがなければ(1)の結果から直接 $\cos 2\theta$ を出すこともできる. 試しに計算してみると，次数が高く苦戦する人もいるであろう.

> ※ここに挙げた問題以外にも記述試験においての基本問題は存在する. 別に紹介した問題集などで演習を積んでおきたい. しかしながら近年のセンターの難化傾向を考えると，そういった基本・典型的な問題の演習だけでは歯が立たない. なぜなら「時間の制約があり解法に自由がきかない」からである. ここで挙げた問題の中に，それを攻略する鍵となる問題をちりばめてある. しっかりと理解した上で講義問題に臨んでほしい.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1

[1]　(1)　$f(\theta)=\sin(a\theta)+\sqrt{3}\cos(a\theta)=2\left\{\sin(a\theta)\cdot\frac{1}{2}+\cos(a\theta)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\mathbf{2}\sin\left(a\theta+\frac{\pi}{\mathbf{3}}\right)$

(2)　$f(\theta)=0$ より　$2\sin\left(a\theta+\frac{\pi}{3}\right)=0$　　つまり　$\sin\left(a\theta+\frac{\pi}{3}\right)=0$　$(a>0)$

これを満たす正の角 θ のうち最小のものは　$a\theta+\frac{\pi}{3}=\pi$　　ゆえに　$\theta=\frac{\mathbf{2}}{3a}\pi$

小さい方から数えて2番目は　$a\theta+\frac{\pi}{3}=\pi+\pi=2\pi$

3番目は　$a\theta+\frac{\pi}{3}=\pi+2\pi=3\pi$

4番目は　$a\theta+\frac{\pi}{3}=\pi+3\pi=4\pi$　　ゆえに　$\theta=\frac{\mathbf{11}}{3a}\pi$

5番目は　$a\theta+\frac{\pi}{3}=\pi+4\pi=5\pi$　　ゆえに　$\theta=\frac{\mathbf{14}}{3a}\pi$

[2]　(1)　$A=b-a$，$B=b+a$ とおくと

$$f(\theta)=(b-a)\sin^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta+(b+a)\cos^2\theta$$
$$=\boldsymbol{a}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+\mathbf{2}\boldsymbol{b}\sin\theta\cos\theta+\boldsymbol{b}$$
$$=a\cos2\theta+b\sin2\theta+b$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin2\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos2\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)+b$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\mathbf{2}\theta+\alpha)+b$$

ただし，α は $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ より，$\tan\alpha=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ を満たす角である．

(2)　$0\leqq\theta<\pi$ より　$0\leqq2\theta<2\pi$　よって　$\alpha\leqq2\theta+\alpha<2\pi+\alpha$　$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

したがって，$f(\theta)$ は

$2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$　つまり　$\theta=\frac{\pi-2\alpha}{\mathbf{4}}$ のとき　最大値　$\sqrt{a^2+b^2}+b$　をとり，

$2\theta+\alpha=\frac{3}{2}\pi$　つまり　$\theta=\frac{\mathbf{3}\pi-2\alpha}{\mathbf{4}}$ のとき　最小値　$-\sqrt{a^2+b^2}+b$　をとる．

最大値と最小値の条件より　$\sqrt{a^2+b^2}+b=10+2\sqrt{29}$，$-\sqrt{a^2+b^2}+b=10-2\sqrt{29}$

よって　$b=10$，$\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{29}$　　$a^2+100=116$　　$a=4$

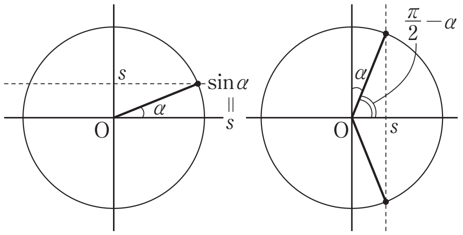
ゆえに　$A=\mathbf{6}$，$B=\mathbf{14}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 $\sin\alpha=\cos 2\beta\quad(0\leqq\alpha\leqq\pi,\ 0\leqq 2\beta\leqq 2\pi)$ について

$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ のとき　$\dfrac{1}{2}=\cos 2\beta$　よって　$2\beta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$　　ゆえに　$\beta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}},\ \boldsymbol{\dfrac{5}{6}}\pi$

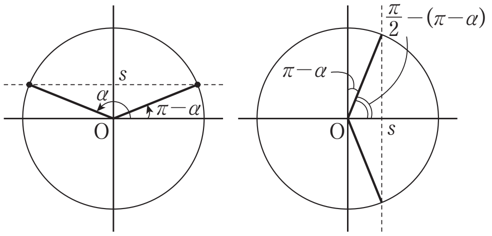
$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき



$2\beta_1=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$　よって　$\beta_1=\dfrac{\pi}{\boldsymbol{4}}-\dfrac{\alpha}{\boldsymbol{2}}$

$2\beta_2=2\pi-2\beta_1$　よって　$\beta_2=\pi-\beta_1=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}\pi+\dfrac{\alpha}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\alpha<\pi$ のとき



$2\beta_1=\dfrac{\pi}{2}-(\pi-\alpha)$　よって　$\beta_1=-\dfrac{\pi}{\boldsymbol{4}}+\dfrac{\alpha}{\boldsymbol{2}}$

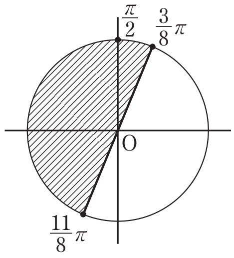
$\beta_2=\pi-\beta_1=\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}\pi-\dfrac{\alpha}{2}$

よって，$\theta=\alpha+\dfrac{\beta_1}{2}+\dfrac{\beta_2}{3}$ とおくと

$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\theta=\dfrac{11}{12}\alpha+\dfrac{3}{8}\pi$ より　$\dfrac{3}{8}\pi\leqq\theta<\dfrac{5}{6}\pi$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\pi$ のとき　$\theta=\dfrac{13}{12}\alpha+\dfrac{7}{24}\pi$ より　$\dfrac{5}{6}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{11}{8}\pi$　　ゆえに　$\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}\pi\leqq\theta\leqq\boldsymbol{\dfrac{11}{8}}\pi$

したがって，$y=\sin\theta$ が最大となるのは



$\theta=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\dfrac{11}{12}\alpha+\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{\pi}{2}$

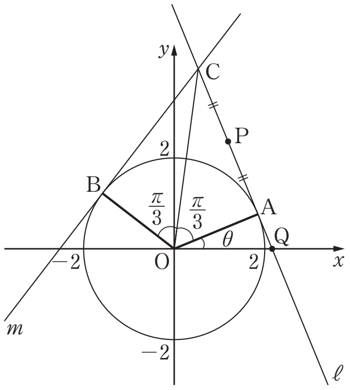
つまり　$\alpha=\boldsymbol{\dfrac{3}{22}}\pi$ のときで，最大値は **1** である．

3 (1)　$\triangle\mathrm{AOC}\equiv\triangle\mathrm{BOC}$ より　$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$

したがって，$\mathrm{OC}=2\mathrm{OA}=\boldsymbol{4}$

また，OC が x 軸の正方向となす角は $\theta+\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに　$\mathrm{C}\left(\boldsymbol{4}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{\boldsymbol{3}}\right),\ \boldsymbol{4}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{\boldsymbol{3}}\right)\right)$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　線分 AC の中点 P の x 座標は

$$\frac{1}{2}\left\{2\cos\theta+4\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\cos\theta+2\left(\cos\theta\cdot\frac{1}{2}-\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\mathbf{2}\cos\theta-\sqrt{\mathbf{3}}\sin\theta$$

であり，y 座標は

$$\frac{1}{2}\left\{2\sin\theta+4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\sin\theta+2\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\mathbf{2}\sin\theta+\sqrt{\mathbf{3}}\cos\theta$$

である.

$\mathrm{AC}=2\sqrt{3}$ より　$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\mathrm{AQ}=2\tan\theta$ より　$\triangle\mathrm{OAQ}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\tan\theta=2\tan\theta$

$\triangle\mathrm{OAC}=2\cdot\triangle\mathrm{OQA}$ より　$2\sqrt{3}=2\cdot2\tan\theta$　　$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より　$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{7}}$　　ゆえに　$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{7}},\ \frac{\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{21}}}{\mathbf{7}}\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

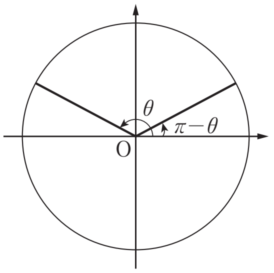
練習問題解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　三角関数①

※この練習問題の解答は，センター試験において正解をマークするための「必要最低限」の解答です．よって，途中計算やプロセスをすべて記したものではありませんが，計算のポイントとなる部分については詳細に記してある部分もあります．試験の本番にこれらをきっちりすべて記述する必要はありません．限られたスペースと時間の中で，自分にとって必要なものを計算して残す練習をしてください．

1



［1］ ⑴　$f(\theta)=0$ より　$\sin(\theta-a)=\sin\theta$

$0<a<\pi$ より　$\theta-a=\pi-\theta$　ゆえに　$\theta=\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}+\dfrac{a}{2}$

このとき　$\sin(\theta-a)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{a}{2}\right)=\cos\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}$　より

$0<\dfrac{a}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であることから　$\dfrac{a}{2}=\dfrac{\pi}{3}$　　ゆえに　$a=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\pi$

⑵　$a=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき

$$f(\theta)=\sin\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)-\sin\theta=\sin\theta\left(-\frac{1}{2}\right)-\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta$$

$$=-\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=-\sqrt{3}\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$

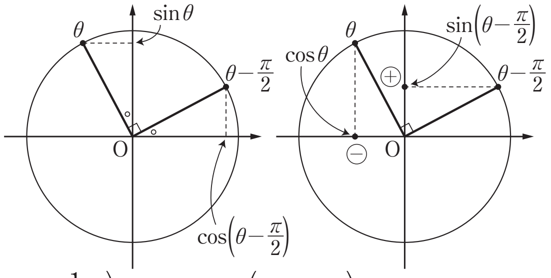
$$=-\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$　より　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$

よって，$f(\theta)$ は　$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7}{6}\pi$

つまり　$\theta=\pi$ のとき　最大値　$-\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$　をとり，

$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$\theta=\dfrac{\pi}{\mathbf{3}}$ のとき　最小値　$-\sqrt{3}\cdot1=-\sqrt{\mathbf{3}}$　をとる．



［2］　$f(x)=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin3x$

$g(x)=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\cos3x$　より

$f(x)+g(x)=2(\sin3x-\cos3x)$

$$=2\sqrt{2}\left(\sin3x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos3x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{2\sqrt{2}}\sin\left(\mathbf{3}x-\frac{\pi}{\mathbf{4}}\right)$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $0\leqq3x\leqq\dfrac{3}{2}\pi$　つまり　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq3x-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$

よって　$f(x)+g(x)$ は　$3x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

つまり　$x=\dfrac{\pi}{\mathbf{4}}$ のとき　最大値　$2\sqrt{2}\cdot1=\mathbf{2\sqrt{2}}$　をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　すべての x について　$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$　よって，(1)より　$\sin 4\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より　$0<4\theta<2\pi$，$0<\frac{\pi}{2}-\theta<\frac{\pi}{2}$　であるから

$4\theta=\frac{\pi}{2}-\theta$　または　$4\theta=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}+\theta$　　ゆえに　$\theta=\frac{\pi}{\mathbf{6}}$，$\frac{\pi}{\mathbf{10}}$　$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

ここで　$\sin 4\theta=\sin 2(2\theta)$ より　(1)から　$\mathbf{2}\sin 2\theta\cos 2\theta=\cos\theta$

$2\cdot 2\sin\theta\cos\theta\cdot(1-2\sin^2\theta)=\cos\theta$　　よって　$(\mathbf{4}\sin\theta-\mathbf{8}\sin^3\theta)\cos\theta=\cos\theta$

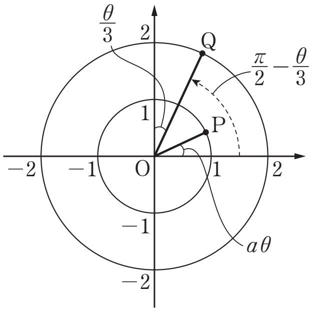
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta>0$ であるから　$4\sin\theta-8\sin^3\theta=1$

つまり　$8\sin^3\theta-4\sin\theta+1=0$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ はこの式を満たすから，この式は左辺を $2\sin\theta-1$ で割る，または組立除法を使うことにより　$(2\sin\theta-1)(4\sin^2\theta+2\sin\theta-1)=0$　と変形できる.

$\mathbf{4}\sin^2\theta+\mathbf{2}\sin\theta-1=0$　より　$\sin\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$　　よって　$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\mathbf{-1+\sqrt{5}}}{\mathbf{4}}$　(>0)

3　$\mathrm{P}(\cos a\theta,\ \sin a\theta)$　$\mathrm{Q}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right),\ 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right)\right)$



(1)　$\theta=\pi$ のとき　$\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}=\frac{\pi}{6}$　　よって　$\mathrm{Q}(\sqrt{\mathbf{3}},\ \mathbf{1})$

(2)　題意を満たすのは　$a\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}$

つまり　$\theta=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6a+2}}\pi$　のとき.

これを α とおくと　$0\leqq\theta\leqq\alpha$ のとき　$0\leqq\frac{\theta}{3}\leqq\frac{\alpha}{3}$

よって，Q の軌跡を弧とする扇形は半径 2，中心角 $\frac{\alpha}{3}$

その面積は　$\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\alpha}{3}=\frac{2}{3}\alpha=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3a+1}}\pi$

(3)　$\mathrm{Q}\left(2\sin\frac{\theta}{3},\ 2\cos\frac{\theta}{3}\right)$ より

$$\mathrm{PQ}^2=\left(2\sin\frac{\theta}{3}-\cos a\theta\right)^2+\left(2\cos\frac{\theta}{3}-\sin a\theta\right)^2$$

$$=4\sin^2\frac{\theta}{3}-4\cos a\theta\sin\frac{\theta}{3}+\cos^2 a\theta+4\cos^2\frac{\theta}{3}-4\sin a\theta\cos\frac{\theta}{3}+\sin^2 a\theta$$

$$=4-4\left(\sin a\theta\cos\frac{\theta}{3}+\cos a\theta\sin\frac{\theta}{3}\right)+1=5-4\sin\left(a\theta+\frac{\theta}{3}\right)$$

$$=\mathbf{5-4}\sin\left(\frac{\mathbf{3a+1}}{\mathbf{3}}\theta\right)$$

(4)　$f(x)$ の基本周期は　$2\pi\cdot\frac{3}{3a+1}$　これが 4π より　$\frac{3}{3a+1}=2$　　ゆえに　$a=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。